

## Chapitre 4 : Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel généralise les propriétés de  $\mathbb{R}^n$  et de l'ensemble des matrices  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**Définition 33** (espace vectoriel).

On appelle *espace vectoriel* (réel) un ensemble non-vide  $V$  composé d'éléments sur lesquels on définit une opération d'addition et une opération de multiplication par un scalaire dans  $\mathbb{R}$

telles que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- 0)  $u + v \in V$  et  $\lambda u \in V$  ;
- 1)  $u + v = v + u$  pour tout  $u, v \in V$  ;
- 2)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  pour tout  $u, v, w \in V$  ;
- 3) Il existe un élément de  $V$ , noté  $0_V$ , tel que  $u + 0_V = u$  pour tout  $u \in V$  ;
- 4) Pour tout  $u \in V$ , il existe un élément noté  $-u \in V$  tel que
$$u + (-u) = 0_V;$$
- 5)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$  pour tout  $u, v \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  ;
- 6)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$  pour tout  $u \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ;
- 7)  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$  pour tout  $u \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ;
- 8)  $1 \cdot u = u$  pour tout  $u \in V$ .

On appelle les éléments de  $V$  des vecteurs, notés  $v \in V$ .

### **Remarque**

**Propriétés** Pour tout espace vectoriel  $V$ , on a :

## Exemples classiques

- 1) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel réel.
- 2) L'ensemble des matrices  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel réel.
- 3) L'ensemble des fonctions réelles  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  muni des opérations

est un espace vectoriel réel.

## Remarque

### L'ensemble des polynômes à coefficients réels

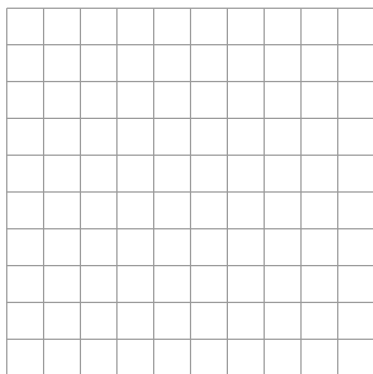
Pour  $n \geq 0$ , on définit

## 4.1 Sous-espaces vectoriels

**Définition 34** (sous-espace vectoriel).

Soit  $V$  un espace vectoriel (EV). On appelle *sous-espace vectoriel* une partie  $W$  de  $V$  telle que

**Exemple**



Remarques

Exemples

## Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie d'un espace vectoriel $V$

**Définition 35** (span ou vect).

Soit  $V$  un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs de  $V$ . L'ensemble des combinaisons linéaires de  $v_1, \dots, v_p$  s'appelle le *span*.

**Théorème 29.** *Soient  $v_1, \dots, v_p$  des éléments d'un espace vectoriel  $V$ . Alors*

**Preuve**

## Exemple

**Définition 36** (famille génératrice).

On dira que  $\{v_1, \dots, v_p\}$  est une *famille génératrice* de  $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$ .

## Exemple

## 4.2 Applications linéaires, noyaux et images

**Définition 37** (application linéaire).

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et  $T : V \rightarrow W$ . On dit que  $T$  est une *application linéaire* si elle associe à tout élément  $v$  de  $V$  un unique élément  $T(v)$  de  $W$  et si  $T$  vérifie

1.

2.

## Exemples

**Définition 38** (noyau d'une application linéaire).

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Le *noyau* de l'application  $T$  est l'ensemble

## Exemple

**Définition 39** (image d'une application linéaire).

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. L'*image* de l'application  $T$  est l'ensemble



## Exemple

**Théorème 30.** *Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors*

- 1.  $\text{Ker}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .*
- 2.  $\text{Im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .*

## Preuve

## Cas particulier des matrices

**Définition 40** (noyau d'une matrice).

Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Le *noyau de la matrice*  $A$ , noté  $\text{Ker}(A)$ , est l'ensemble

**Théorème 31.** *Le noyau d'une matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Définition 41** (image d'une matrice).

Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . L'*image de*  $A$ , notée  $\text{Im}(A)$ , est l'ensemble

**Théorème 32.** *Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Alors  $\text{Im}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$ .*

**Preuve**

**Exemple**